УДК 517.983.23

Л. Ф. Коркина, М. А. Рекант

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДРОБНЫХ СТЕПЕНЕЙ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ОПЕРАТОРОВ

Пусть X — комплексное банахово пространство, A — действующий в X плотно определенный линейный замкнутый оператор, причем:

1) $(-\infty,0)\subset\rho(A)$ $\quad(\rho(A)$ – регулярное множество оператора $A)$;

2) для нормы резольвенты $R(\mu)=(A-\mu E)^{-1}$ оператора A (E — единичный в X оператор) справедлива при некоторых $c_0>0$, $\gamma\le 1$ и любом $\lambda<0$ оценка

$$\|R(\lambda)\|\le c_0(|\lambda|+1)^{-\gamma}. \tag{1}$$

В этих предположениях при $\gamma=1$ А. Балакришнаном [1], М. А. Красносельским и П. Е. Соболевским [2], Т. Като [3] были введены дробные степени оператора A. Теория дробных степеней разрабатывалась далее в работах многих математиков (см., например, [4]–[7]). При $\gamma\in(0,1]$ в предположении, что неравенство (1) справедливо в угловом секторе, содержащем $(-\infty,0]$, вещественные степени оператора A рассмотрены в [8]. В [9]–[12] изучены классы (дифференциальных, разностных) операторов с $\gamma\in[0,1)$. В [13] авторами были рассмотрены комплексные степени оператора без предположения $\gamma>0$.

Среди результатов, полученных по теории дробных степеней операторов, отметим неравенства моментов, полученные в ряде работ (см., например, [2], [4]–[6], [8]) на основе интегральных представлений A^z и оценок $\|A^zR^m(\lambda)\|$ $\quad(z\in\mathbb{C},\ m\in\mathbb{N},\ \operatorname{Re}z<m+\gamma-1)$.

В данной статье предполагается выполненной оценка (1) ($\gamma\le 1$ произвольно) в некоторой (заданной) области Ω, содержащей $(-\infty,0]$. Задание (1) в Ω, а не только на $(-\infty,0)$ позволяет получить оценки $\|A^zR^m(\lambda)\|$ в подобластях Ω и улучшить их на $(-\infty,0)$. Исходя из оценок $\|A^zR^m(\lambda)\|$, строятся интегральные представления оператора A^z, обобщающие имеющиеся в [7]. Это позволяет в дальнейшем получать неравенства моментов для дробных степеней оператора A в ситуациях, в которых ранее эти неравенства не были известны.

Переходим к изложению результатов работы.

Пусть $\Gamma(a,\alpha)$ ($a>0,\ \alpha\in\mathbb{R}$) – ориентированная кривая, состоящая из дуг $\Gamma_j(a,\alpha)$ ($j=1,2,3$), задаваемых соответственно уравнениями

$$\lambda=-s-ia(s+1)^{\alpha}\quad(s\geq 0),$$

$$\lambda=ae^{i\varphi}\quad\left(|\varphi|\leq\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\lambda=-s+ia(s+1)^{\alpha}\quad(s\geq 0),$$

$\Omega(a,\alpha)$ – область с границей $\Gamma(a,\alpha)$, содержащая ноль, обход $\Gamma(a,\alpha)$ положителен относительно $\Omega(a,\alpha)$. Выполнение оценки (1) на $(-\infty,0)$ обеспечивает ее справедливость в $\Omega(a,\gamma)$ при $a\in(0,c_0^{-1})$. Мы будем предполагать, что:

1) $\rho(A)\supset\overline{\Omega(a,\alpha)}$ при некоторых $\alpha\geq\gamma,\ a>0$;

2) в $\overline{\Omega(a,\alpha)}$ имеет место неравенство (1).

(Заметим, что $\Omega(a,\alpha)\supset\Omega(a,\gamma)$ при $\alpha\geq\gamma$.)

При этих условиях можно ввести [13] комплексные степени оператора A, а именно A^z — замыкание оператора

$$A(z,n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(a,\beta)}\mu^{z-n}R(\mu)A^n d\mu\quad(\mu^z=\exp(z\ln\mu),\ |\arg\mu|<\pi),$$

где интеграл сходится в сильной операторной топологии на множестве $D(A(z,n))=\{x\in X:\ A(z,n)x\in X\}$. Установлено, что интегральный оператор $A(z,n)$ не зависит от $\beta\in[\gamma,\alpha]$ и допускает замыкание, не зависящее от n ($n>\operatorname{Re}z-\gamma+1$), а при $\operatorname{Re}z<\gamma-1$ оператор A^z непрерывен на X. При $z\in\mathbb{Z}$ это понятие степени оператора совпадает с естественно понимаемой целой степенью оператора A.

Отметим некоторые свойства степеней оператора A и произведений $A^zR^m(\lambda)$ ($z\in\mathbb{C},\ m\in\mathbb{N},\ \lambda\in\rho(A)$) [13], [14].

1. Оператор A^z обратим и $(A^z)^{-1}=A^{-z}$.

2. $\overline{A^{z_1}A^{z_2}\dots A^{z_k}}=A^{z_1+z_2+\dots+z_k}$. В частности, при $k=2$ если хотя бы один из операторов A^{-z_1},A^{z_2} непрерывен, то $A^{z_1}A^{z_2}=A^{z_1+z_2}$.

3. Оператор $A^zR^m(\lambda)$ непрерывен тогда и только тогда, когда оператор A^{z-m} непрерывен, что эквивалентно тому, что $D(A^z)\supset D(A^m)$.

4. При всех $x\in D(A^n)$ ($n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$) векторная функция $A^zR^m(\lambda)x$ аналитична по λ на $\rho(A)$ и аналитична по z в области $\operatorname{Re}z<m+n+\gamma-1$.

Введем еще ряд обозначений: если оператор A_2 — продолжение оператора A_1, то мы будем писать $A_1\subset A_2$; для $\beta\in\mathbb{R}$

$$\hat{\beta}=\max\{\beta,1\};\quad\check{\beta}=\min\{\beta,1\};$$

$$P_\sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < \sigma\} \quad (\sigma \in \mathbb{R});$$
$$B(\lambda_0, r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < r\};$$
$$B_+(\lambda_0, r) = B(\lambda_0, r) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq \operatorname{Re}\lambda_0\} \quad (\lambda_0 \in \mathbb{C},\ r > 0).$$

Нам также понадобится область $G_0 = G(a, \alpha; b_0)$, $b_0 \in (-c_1, 0)$, $c_1 = c_0^{-1} \inf\{(|\lambda| + 1)^\gamma (|\operatorname{Re}\lambda| + 1)^{-\hat{\alpha}\gamma} : \lambda \in \Gamma_1(a, \alpha)\}$, определяемая следующим образом: при $\alpha > 1$

$$\begin{aligned} G_0 &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = -s + b_0(s+1)^{\alpha\gamma},\ |Im\lambda| < a(s+1)^\alpha,\ s > 0\} \cup \\ &\cup\ B_+(|b_0|, a), \end{aligned}$$

а при $\alpha \leq 1$

$$\begin{aligned} G_0 &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = -s,\ |Im\lambda| < a(s+1)^\alpha - b_0(s+1)^\gamma,\ s > 0\} \cup \\ &\cup\ B_+(0, a + |b_0|). \end{aligned}$$

Кроме того, в предположении, что $m \in \mathbb{N}$ и ($\operatorname{Re} z < m + \gamma - 1$ или $z \in \mathbb{Z}$, $z \leq m$) нам понадобятся две оценки $\|A^z R^m(\lambda)\|$, имеющиеся в [15]:

1) при некотором $c > 0$ и всех $\lambda \in \overline{G}_0$ (и, следовательно, всех $\lambda \in \overline{\Omega(a, \alpha)}$)

$$\|A^z R^m(\lambda)\| \leq c(|\lambda| + 1)^{\max\{-m, \operatorname{Re} z - m\gamma\}} ln(|\lambda| + 2); \tag{2}$$

2) при некотором $c > 0$ и всех $\lambda \in \overline{\Omega(q, \varkappa)} \bigcap \rho(A)$

$$\|A^z R^m(\lambda)\| \leq c(|\lambda| + 1)^{\max\{-m, \operatorname{Re} z - \gamma - (m-1)\check{\alpha}/\hat{\varkappa}\}} ln(|\lambda| + 2), \tag{3}$$

где при достаточно большом по модулю отрицательном σ

$$\Omega(q, \varkappa) \cap P_\sigma \subset \Omega(a, \alpha) \cap P_\sigma \tag{4}$$

и

$$\max\{\varkappa, \varkappa\gamma\} \leq 1. \tag{5}$$

Утверждение 1. *Пусть* $m \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $z, w \in \mathbb{C}, \lambda \in \Omega(a, \alpha)$, $x \in D(A^w)$ *и выполнено условие*

$$\operatorname{Re} z < m + \operatorname{Re} w + \gamma - 1 \tag{6}$$

или условие

$$\left.\begin{array}{rcl} \operatorname{Re} w & < & \gamma \quad \text{или} \quad -w \in \mathbb{N}, \\ \operatorname{Re} z & < & \min\{m + \operatorname{Re} w, m + \gamma - 1\} \end{array}\right\}. \tag{7}$$

Тогда

$$A^z R^m(\lambda) x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(a,\alpha)} \frac{\mu^{z-w}}{(\mu - \lambda)^m} R(\mu) A^w x d\mu. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (6) и $y = A^w x$. Тогда, как установлено в [14], имеет место формула

$$A^{z-w}R^m(\lambda)y = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(a,\alpha)} \frac{\mu^{z-w}}{(\mu-\lambda)^m} R(\mu)yd\mu.$$

Так как, согласно [13],

$$A^{z-w}R^m(\lambda)A^w \subset A^{z-w}A^w R^m(\lambda) \subset A^z R^m(\lambda),$$

то

$$A^{z-w}R^m(\lambda)y = A^z R^m(\lambda)x$$

и имеет место (8).

Пусть теперь выполнено (7). Если $-w \in \mathbb{N}$, то представление (8) установлено в [14]. Считаем далее, что $\operatorname{Re} w < \gamma$. Используя (2) (при соответствующих z и m), получаем

$$\|A^w R(\mu)\| \le c(|\mu|+1)^{\max\{-1,\operatorname{Re} w-\gamma\}}\ln(|\mu|+2).$$

Отсюда следует, что интеграл в (8) сходится абсолютно и равномерно по z в некоторой окрестности точки $z \in \mathcal{P}_{\min\{m+\operatorname{Re} w,m+\gamma-1\}}$. Поэтому он сходится к аналитической (по z) функции на $\mathcal{P}_{\min\{m+\operatorname{Re} w,m+\gamma-1\}}$. Левая часть в (8) — также аналитическая по z функция в области $\mathcal{P}_{m+\gamma-1} \supset \mathcal{P}_{\min\{m+\operatorname{Re} w,m+\gamma-1\}}$. Поскольку в $\mathcal{P}_{\min\{m+\operatorname{Re} w+\gamma-1,m+\operatorname{Re} w,m+\gamma-1\}} \subset \mathcal{P}_{m+\operatorname{Re} w+\gamma-1}$ (по доказанному) соотношение (8) справедливо, то, в силу теоремы единственности для аналитических функций, (8) имеет место в $\mathcal{P}_{\min\{m+\operatorname{Re} w,m+\gamma-1\}} \supset \mathcal{P}_{\min\{m+\operatorname{Re} w+\gamma-1,m+\operatorname{Re} w,m+\gamma-1\}}$. Утверждение доказано.

Определение 1. *Пусть L – простая неограниченная кривая в $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль луча $(-\infty,0]$, $\widetilde{\Delta} \subset \mathbb{C}$ — область с границей L, $0 \notin \widetilde{\Delta}$. Назовем кривую L* допустимой*, если:*

1) *она выходит из бесконечности и возвращается в бесконечность, $\widetilde{\Delta}$ остается справа при обходе L;*

2) *при некотором $c > 0$ и любом $\lambda \in \Delta = \mathbb{C} \setminus \overline{\widetilde{\Delta}}$ выполнено неравенство* (1).

Примерами допустимых кривых являются кривые $\Gamma(d,\gamma)$ с $d \in (0, c_0^{-1})$, а также кривые $\Gamma_0(r)$ ($r \in (0, c_0^{-1})$), состоящие из лучей $(-\infty - i0, -r - i0]$, $[-r + i0, -\infty + i0)$ и окружности с центром в нуле радиуса r.

Так же, как и в [14], доказывается, что если L – допустимая кривая, $\tilde{\Delta} \not\ni 0$ – область с границей L, $\Delta = \mathbb{C} \setminus \overline{\tilde{\Delta}}$, $\lambda \in \Delta$, $m \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $z, w \in \mathbb{C}$, то имеет место соотношение

$$A^z R^m(\lambda)x = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu^{z-w}}{(\mu-\lambda)^m} R(\mu) A^w x d\mu \tag{9}$$

в предположении, что выполнено условие (6), а в случае, когда $L \subset G_0$, – условие (6) или (7). [Прежде, чем получить представление (9) в общем виде, оно устанавливается для $L = \Gamma_0(r)$ с $r \in (0, c_0^{-1})$.]

Введем обозначения

$$D(k) = \Big\{(w,z) \in \mathbb{C}^2 :\ \mathrm{Re}\, w < k + \gamma - 1,\ \mathrm{Re}\, z < \min\{\mathrm{Re}\, w, k(\gamma-1)\}\Big\},$$

$$J(w,z;p,x,L) = \int_L \mu^{z-w+p-1} R^p(\mu) A^w x d\mu. \tag{10}$$

Лемма 1. *Пусть L – допустимая кривая, $L \subset G_0$, $\ell \in \mathbb{N}$, $x \in D(A^w)$. Тогда формула* (10) *с $p = \ell$ задает аналитическую по переменной w функцию в области $D(\ell) \subset \mathbb{C}^2$, а при $w \neq z + \ell - 1$ и в области $D(\ell - 1)$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что для $L = \Gamma_0(r)$ с $r \in (0, c_0^{-1})$ интеграл в (10) сходится абсолютно в $D(p)$ при $p > 1$ и равномерно по ω в некоторой окрестности каждой точки области $D(p)$. Поэтому функция $J(w,z;p,x,\Gamma_0(r))$ аналитична в $D(p)$ по w. В частности, это верно при $p = \ell - 1$ и $p = \ell$. Так же, как и в [14], устанавливается, что $J(w,z;p,x,L) = J(w,z;p,x,\Gamma_0(r))$ при $(w,z) \in D(p)$. Таким образом, утверждение леммы справедливо в области $D(\ell)$.

Положим в (10) $p = \ell - 1$, $(w,z) \in D(\ell - 1)$ и воспользуемся формулой интегрирования по частям. Используя оценки $\|A^w R^{\ell-1}\|$, заключаем, что внеинтегральный член равен нулю и

$$\begin{aligned} J(w,z;\ell-1,x,L) &= -\frac{\ell-1}{z-w+\ell-1} \int_L \mu^{z-w+\ell-1} R^\ell(\mu) A^w x d\mu = \\ &= -\frac{\ell-1}{z-w+\ell-1} J(w,z;p,x,L). \end{aligned}$$

Поэтому функция $J(w,z;\ell,x,L)$ аналитична по w при $(z,w) \in D(\ell - 1)$. Лемма доказана.

В дальнейшем считаем $(z-w+1)(z-w+z)\dots(z-w+\ell-1) = 1$ при $\ell = 1$.

Утверждение 2. *Пусть L – допустимая кривая, $\ell \in \mathbb{N}$, $z, w \in \mathbb{C}$, $x \in D(A^w)$. Пусть также $\ell > 1$, $w - z \neq 1, 2, \ldots, \ell - 1$, выполнено условие*

$$\operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w + (\ell - 1)(\gamma - 1) \tag{11}$$

или

$$\begin{cases} L \subset G_0, \\ \operatorname{Re} w < k + \gamma - 1 \quad \text{или} \quad -w \in \mathbb{N}, \\ \operatorname{Re} z < \min\{\operatorname{Re} w, k(\gamma - 1)\} \end{cases} \tag{12}$$

с $k = \ell - 1$ или $k = \ell$. Тогда

$$\begin{aligned} A^z x &= \frac{(-1)^{\ell-1}(\ell-1)!}{2\pi i(z-w+1)(z-w+2)\ldots(z-w+\ell-1)} \times \\ &\times \int_L \mu^{z-w+\ell-1} R^\ell(\mu) A^w x \, d\mu. \end{aligned} \tag{13}$$

При $\ell = 1$ формула (13) имеет место при условии (11) с $\ell = 2$ или (12) с $k = 1$.

Доказательство. При $\ell = 1$ формула (13) верна, так как совпадает с (9) при $m = 0$ [при этом условие (6) совпадает с (11), а при $L \subset G_0$ (7) — с (12) при $k = 1$].

Пусть теперь $\ell > 1$. Сначала докажем (13) в предположении (11) или

$$\begin{cases} L \subset G_0, \\ \operatorname{Re} w < \gamma \quad \text{или} \quad -w \in \mathbb{N}, \\ \operatorname{Re} z < \min\{\operatorname{Re} w, (\ell - 1)(\gamma - 1)\}. \end{cases} \tag{14}$$

К интегралу (9) с $m = 0$ применим метод интегрирования по частям. Используя (2) для оценки $\|R^\ell(\mu)\|$ [при выполнении (11)] или оценки $\|A^w R^\ell(\mu)\|$ [при выполнении (14)] ($\mu \in L$), заключаем, что внеинтегральный член равен нулю и

$$A^z x = -\frac{1}{2\pi i(z-w+1)} \int_L \mu^{z-w+1} R^2(\mu) A^w x \, d\mu.$$

Производя интегрирование по частям еще $\ell - 2$ раза, делаем вывод о равенстве нулю внеинтегральных членов и справедливости формулы (13) при сделанных предположениях.

Осталось установить (13) в предположении $L \subset G_0$, $(w, z) \in D(k)$. Интеграл в (13) по лемме аналитичен в области $D(\ell - 1) \bigcup D(\ell)$ по переменной w, а поскольку (13) имеет место при выполнении (14), то по теореме единственности для аналитических функций (13) имеет место и при $(w, z) \in D(k)$. Утверждение доказано.

Введем обозначение

$$G(k) = \Big\{ \; (w,z) \in \mathbb{C}^2 : \quad \operatorname{Re} w < k + \gamma - 1, \quad \operatorname{Re} z < \min\Big\{\operatorname{Re} w, \gamma - 1 + (k-1)\Big(\frac{\check{\alpha}}{\hat{\varkappa}} - 1\Big)\Big\}\Big\}.$$

Лемма 2. *Пусть T – допустимая кривая, $T \subset \overline{\Omega(q,\varkappa)} \bigcap \rho(A)$, $\ell \in \mathbb{N}$, $x \in D(A^w)$. Тогда формула (14) с $p = \ell$ задает аналитическую по переменной w функцию в области $G(\ell) \subset \mathbb{C}^2$, а при $w \neq z+\ell-1$ – и в области $G(\ell-1)$.*

Лемма 2 доказывается по той же схеме, что и лемма 1.

Утверждение 3. *Пусть справедливы (5) и (4) (при некотором $\sigma < 0$), L — допустимая кривая, лежащая в $\overline{\Omega(q,\varkappa)} \bigcap \rho(A)$, $\ell \in \mathbb{N}$, $z, w \in \mathbb{C}$, $x \in D(A^w)$. Пусть также $w - z \neq 1, 2, \dots, \ell - 1$, $\ell > 1$, выполнено условие*

$$\operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w + \gamma - 1 + (\ell - 2)\Big(\frac{\check{\alpha}}{\hat{\varkappa}} - 1\Big) \tag{15}$$

или условие

$$\begin{cases} \operatorname{Re} w < k + \gamma - 1 \quad \text{или} \quad -w \in \mathbb{N}, \\ \operatorname{Re} z < \min\Big\{\operatorname{Re} w, \gamma - 1 + (k-1)\Big(\frac{\check{\alpha}}{\hat{\varkappa}} - 1\Big)\Big\} \end{cases} \tag{16}$$

с $k = \ell - 1$ или $k = \ell$. Тогда имеет место (13). При $\ell = 1$ формула (13) справедлива при условии (15) с $\ell = 2$ или (16) с $k = 1$.

Доказательство. При $\ell = 1$ мы находимся в условиях утверждения 1, если взять в нем $m = 0$. Поэтому в этом случае верна формула (13) [так как она совпадает с (9)].

Пусть теперь $\ell > 1$. Сначала докажем (13) в предположении (15) или

$$\begin{cases} \operatorname{Re} w < \gamma \quad \text{или} \quad -w \in \mathbb{N}, \\ \operatorname{Re} z < \min\Big\{\operatorname{Re} w, \gamma - 1 + (\ell-2)\Big(\frac{\check{\alpha}}{\hat{\varkappa}} - 1\Big)\Big\}. \end{cases} \tag{17}$$

К интегралу (9) с $m = 0$ применим метод интегрирования по частям. Используя (3) для оценки $\|R^\ell(\mu)\|$ [при выполнении (15)] или оценки $\|A^w R^\ell(\mu)\|$ [при выполнении (16)] ($\mu \in L$), заключаем, что внеинтегральный член равен нулю и

$$A^z x = -\frac{1}{2\pi i(z - w + 1)} \int_L \mu^{z-w+1} R^2(\mu) A^w x d\mu.$$

Производя интегрирование по частям еще $\ell-2$ раза, делаем вывод о равенстве нулю внеинтегральных членов и справедливости формулы (13) при сделанных предположениях. Далее, с использованием леммы 2, так же, как и при доказательстве утверждения 2, устанавливаем (13) в предположении $(w,z)\in G(k)$. Утверждение доказано.

Замечание 1. *Если вместо* (5) *выполнено условие* $\varkappa \geq \varkappa\gamma > 1$, *то* $\dfrac{\check{\alpha}}{\hat{\varkappa}} = \dfrac{1}{\varkappa} \leq \gamma$ *и, следовательно,*

$$\gamma - 1 + (k-1)\left(\frac{\check{\alpha}}{\hat{\varkappa}} - 1\right) \leq k(\gamma - 1),$$

т.е. в этом случае утверждение 3 *верно, но представляет собой ослабленный вариант утверждения* 2.

Утверждение 4. *Пусть* $\ell \in \mathbb{N}$, $z, w \in \mathbb{C}$, $x \in D(A^w)$,

$$\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} w - \ell \tag{18}$$

и при $\ell > 1$ *выполнено условие*

$$\operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w + \gamma - 1 + (\ell - 2)(\check{\alpha} - 1) \tag{19}$$

или условие

$$\left\{\begin{array}{lcl} \operatorname{Re} w & < & k + \gamma - 1 \quad \text{или} \quad -w \in \mathbb{N}, \\ \operatorname{Re} z & < & \min\{\operatorname{Re} w, \gamma - 1 + (k-1)(\check{\alpha} - 1)\} \end{array}\right. \tag{20}$$

при $k = \ell - 1$ *или* $k = \ell$. *Тогда в предположении, что* $\operatorname{Re} z \neq \operatorname{Re} w - j$ $(j = 1, \ldots, \ell - 1)$,

$$\begin{aligned} A^z x \;&=\; \frac{(\ell-1)!\sin[\pi(w-z)]}{\pi(z-w+1)(z-w+2)...(z-w+\ell-1)} \times \\ &\times \int_0^{+\infty} s^{z-w+\ell-1} R^\ell(-s) A^w x ds. \end{aligned} \tag{21}$$

При $\ell = 1$ *формула* (21) *имеет место при условии* (19) *с* $\ell = 2$ *или* (20) *с* $k = 1$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что условия (19) и (20) совпадают с условиями (15), (16) при $\varkappa = \gamma$. Используя утверждение 3 при $\varkappa = \gamma$, подставим в соотношение (13) $L = \Gamma_0(r) \subset \overline{\Omega(a,\gamma)}$ $(r \in (0,a))$ и затем перейдем в нем к пределу при $r \to 0$. Так как, в силу (18), $\int_{S(0,r)} \mu^{z-w+\ell-1} R^\ell(\mu) A^w x d\mu \to 0$, то

$$\begin{aligned} A^z x &= \frac{(-1)^{\ell-1}(\ell-1)!}{2\pi i(z-w+1)(z-w+2)\cdots(z-w+\ell-1)} \times \\ &\times \lim_{r\to 0}\left[-\int_{+\infty}^{r} e^{-i\pi(z-w+\ell-1)} s^{z-w+\ell-1} R^\ell(-s) A^w x ds + \right. \\ &+ \left.\int_{+\infty}^{r} e^{i\pi(z-w+\ell-1)} s^{z-w+\ell-1} R^\ell(-s) A^w x ds\right], \end{aligned}$$

откуда следует (21). Утверждение доказано.

Замечание 2. *Если в условиях* (19), (20) ℓ *заменить на* $\ell+1$, *то интеграл в* (21) *сходится абсолютно к аналитической относительно* z *функции. Поэтому* (21) *имеет место при* $z = w - j$ $(j = 1, \ldots, \ell-1)$, *если отношение* $\dfrac{\sin \pi(w-z)}{z-w+j}$ *доопределить по непрерывности в этих точках.*

Замечание 3. *Если оценка* (1) *известна только на отрицательной вещественной полуоси, то она же верна и в замкнутой области* $\overline{\Omega(a,\gamma)}$ *с* $a \in (0, c_0^{-1})$ *и все утверждения сохраняют силу с* $\alpha = \varkappa = \gamma$. *При* $\gamma = \alpha = 1$, $w \in \mathbb{Z}$ *представление* (21) (*при соответствующих ограничениях на параметры*) *имеется в работах* [5], [7], *а при* $\gamma \in [0,1]$, $\alpha = 1$, $w \in \mathbb{Z}$ — *в работе* [8].

В заключение установим утверждение, обобщающее часть результатов из [13].

Утверждение 5. *Пусть* $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \rho(A)$. *Тогда*

$$\overline{R^m(\lambda) A^{z_1} A^{z_2} \cdots A^{z_k}} = A^{z_1+z_2+\cdots+z_k} R^m(\lambda). \tag{22}$$

Доказательство. Заметим, что оператор в правой части (22) замкнут и (22) — соотношение, эквивалентное равенству

$$\overline{A^{-z_k} \cdots A^{-z_1}(A-\lambda E)^m} = (A-\lambda E)^m A^{-z_1-\cdots-z_k}. \tag{23}$$

Докажем (23). Отметим, что

$$D((A-\lambda E)^m A^{-z_1-\dots-z_k}) = D(A^{m-z_1-\dots-z_k}),$$

в силу соотношения $A^m A^z = A^{m+z}$ $(z \in \mathbb{C})$. Пусть $x \in D(A^{m-z_1-\dots-z_k})$ и $(A-\lambda E)^m A^{-z_1-\dots-z_k} x = y$. Положим $A^{m-z_1-\dots-z_k} x = y_m$. Так как $\overline{A^{-z_k}\cdots A^{-z_1} A^m} = A^{m-z_1-\dots-z_k}$, то существует такая последовательность $\{x_n\} \subset D(A^{-z_k}\cdots A^{-z_1}A^m)$, что $x_n \to x$, $A^{-z_k}\cdots A^{-z_1}A^m x_n \to y_m$ при $n \to \infty$. Отсюда

$$\begin{aligned}
&A^{-z_k}\cdots A^{-z_1}(A-\lambda E)^m x_n = \\
&= \sum_{j=0}^{m} (-\lambda)^{m-j} A^{-z_k}\cdots A^{-z_1} A^j x_n = \\
&= \sum_{j=0}^{m} (-\lambda)^{m-j} A^{-z_k}\cdots A^{-z_2} A^{-z_1} A^m A^{j-m} x_n = \\
&= \sum_{j=0}^{m} (-\lambda)^{m-j} A^{-z_k}\cdots A^{-z_1} A^{j-m} A^m x_n = \\
&= \sum_{j=0}^{m} (-\lambda)^{m-j} A^{-z_k}\cdots A^{-z_2} A^{j-m} A^{-z_1} A^m x_n = \ldots = \\
&= \sum_{j=0}^{m} (-\lambda)^{m-j} A^{j-m} A^{-z_k}\cdots A^{-z_1} A^m x_n \longrightarrow \sum_{j=0}^{m} (-\lambda)^{m-j} A^{j-m} y_m, \ n \to \infty.
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что
1) $\{x_n\} \subset D(A^{-z_k}\cdots A^{-z_1}A^m) \subset D(A^m)$, откуда $\{A^m x_n\} \subset D(A^{-z_1})$ и потому $\{A^{-s+1}\cdots A^{-z_1}A^m x_n\} \subset D(A^{-s})$ для любого $s = 2,\ldots,k$;
2) $A^{-z_k}\cdots A^{-z_1}A^m A^{j-m} \supset A^{-z_k}\cdots A^{-z_1}A^{j-m}A^m \supset A^{-z_k}\cdots A^{-z_2}A^{j-m}A^{-z_1}A^m \supset \ldots \supset A^{j-m}A^{-z_k}\cdots A^{-z_1}A^m$, поскольку A^{j-m} — непрерывный оператор и, следовательно, $A^z A^{j-m} = A^{z+j-m}$ для $z \in \mathbb{C}$ $(j = 0,1,\ldots,m)$ [13].

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m} (-\lambda)^{m-j} A^{j-m} y_m &= \sum_{j=0}^{m} (-\lambda)^{m-j} A^{j-m} A^{m-z_1-\dots-z_k} x = \\
= \sum_{j=0}^{m} (-\lambda)^{m-j} A^{j-m} A^m A^{-z_1-\dots-z_k} x &= \sum_{j=0}^{m} (-\lambda)^{m-j} A^j A^{-z_1-\dots-z_k} x = \\
= (A-\lambda E)^m A^{-z_1-\dots-z_k} x &= y.
\end{aligned}$$

Таким образом, установлено, что $A^{-z_k-\dots-z_1}(A-\lambda E)^m x_n \to y$ при $n \to \infty$, т.е. имеет место (23). Утверждение доказано.

Следствие 1. *Пусть* $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$, $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $\lambda \in \rho(A)$. *Тогда*
$$\overline{A^{z_1}R^{m_1}(\lambda)\cdots A^{z_k}R^{m_k}(\lambda)} = A^{z_1+\dots+z_k}R^{m_1+\dots+m_k}(\lambda). \tag{24}$$

Доказательство. Так как $R^m(\lambda)A^z \subset A^zR^m(\lambda)$ ($z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \rho(A)$) [13], то имеет место соотношение

$$R^{m_1+\dots+m_k}(\lambda)A^{z_1}\cdots A^{z_k} \subset A^{z_1}R^{m_1}(\lambda)\cdots A^{z_k}R^{m_k}(\lambda) \subset$$
$$\subset A^{z_1}\cdots A^{z_k}R^{m_1+\dots+m_k}(\lambda) \subset A^{z_1+z_2+\dots+z_k}R^{m_1+\dots+m_k}(\lambda),$$

из которого, в силу утверждения, следует (24).

Литература

1. Balakrishnan A.V. An operational calculus for infinitesimal generators of semi-groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. Vol.91. P.330–353.
2. Красносельский М.А., Соболевский П.Е. Дробные степени операторов, действующих в банаховых пространствах // Докл. АН СССР. 1959. Т.129. С.499–502.
3. Kato T. Note on fractional powers of linear operators // Proc. Japan Acad. 1960. Vol.36. P.94–96.
4. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
5. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
6. Komatsu H. Fractional powers of operators // Pacif. J. Math. 1966. Vol.19. P.285–346.
7. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
8. Соболевский П.Е., Чеботарева Л.М. О дробных степенях плохо позитивных операторов // Тр. матем. фак. Воронеж. ун-та. Воронеж, 1971. Вып.3. С.112–118.
9. Евзеров И.Д., Соболевский П.Е. Резольвента и дробные степени обыкновенных дифференциальных операторов в пространствах гладких функций // Дифференц. уравнения. 1976. Т.12, №2. С.225–233.
10. Гурова И.Н., Соболевский П.Е. L–характеристики дробных степеней замкнутых операторов // Матем. заметки. 1979. Т.29, №1. С.123–137.

11. Евзеров И.Д. Оценки резольвенты и области определения дробных степеней абстрактных дифференциальных операторов // Исслед. по функцион. анализу и его приложениям. Свердловск: УрГУ, 1985. С.29–37.

12. Сильченко Ю.Т. Об одном классе полугрупп // Операторные уравнения в функцион. пространствах. Воронеж: ВГУ, 1986. С.80–90.

13. Коркина Л.Ф., Рекант М.А. Дробные степени одного класса операторов // Изв. вузов. Математика. 1991. №9. С.81-83.

14. Коркина Л.Ф., Рекант М.А. Дробные степени оператора и некоторые интегральные представления / Урал. гос. ун-т., 1991. Деп. в ВИНИТИ. 11.07.91. №2950-В91.

15. Коркина Л.Ф., Рекант М.А. Об оценках нормы одной операторной функции // Изв. вузов. Математика. 1995. №2.

Статья поступила 29.01.1998 г.